Научно-образовательный математический центр
Северо-Осетинского государственного университета
имени Коста Левановича Хетагурова

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН

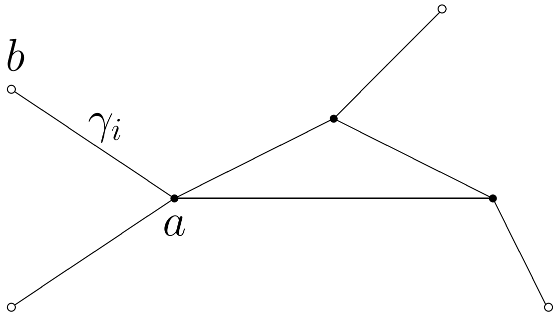
ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

посвящается 70-ти летию профессора А.О. Ватульяна

Р.Ч. Кулаев

Владикавказ, 2023

Основные понятия и обозначения



Граф: $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$;

γ_i – ребра графа, $E(\Gamma) = \bigcup\limits_i \gamma_i$; a, b – вершины графа;

$\partial\Gamma$ – множество граничных вершин графа Γ;

$J(\Gamma)$ – множество внутренних вершин;

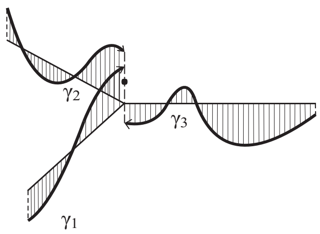
$I(a)$ – множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине a.

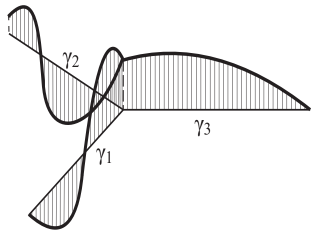
Функция на графе

Функция на графе: $u : \Gamma \to \mathbb{R}$, u_i – сужение функции u на ребро γ_i.

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \to \mathbb{R} \,|\, u_i \text{ равномерно непрерывна } \forall \gamma_i \subset E(\Gamma)\};$$
$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \to \mathbb{R} \,|\, u_i \text{ равномерно непрерывна } \forall \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Пусть a – произвольная вершина (граничная или внутренняя) и $i \in I(a)$. Если функция $u(x)$ равномерно непрерывна на каждом ребре $\gamma_i \subset E(\Gamma)$, то полагаем $u_i(a) := \lim\limits_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$.





Дифференциальное уравнение на графе

Под *дифференциальным уравненим на графе* $Lu = f(x)$, $x \in \Gamma$, понимается

- система уравнений на ребрах $\gamma \subset E(\Gamma)$;
- условия трансмиссии в каждой узловой вершине $c \in J(\Gamma)$.

Краевая задача на графе – это дифференциальное уравнение на графе, дополненное условиями на границе графа.

Основные направления исследований уравнений 4-го порядка на графах

1. Задачи (граничной и внутренней) управляемости (stability, observability and controllability);

2. Спектральные задачи прямые (асимптотика, полнота и базисность) и обратные (восстановление оператора или структуры графа);

3. Качественная теория (функция Грина, положительные решения, неосцилляция, осцилляционные свойства).

4. Нелинейные уравнения.

Дифференциальное уравнение для стержневых систем

Рассматривается уравнение, возникающее при моделировании деформаций плоских стержневых систем:

- уравнения на ребрах

$$(p_i(x)u_i'')'' = f_i(x, u_i, u_i''), \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma),$$

- условия трансмиссии в каждой узловой вершине $a \in J(\Gamma)$, описывающие способ соединения стержней.

Условия δ-типа

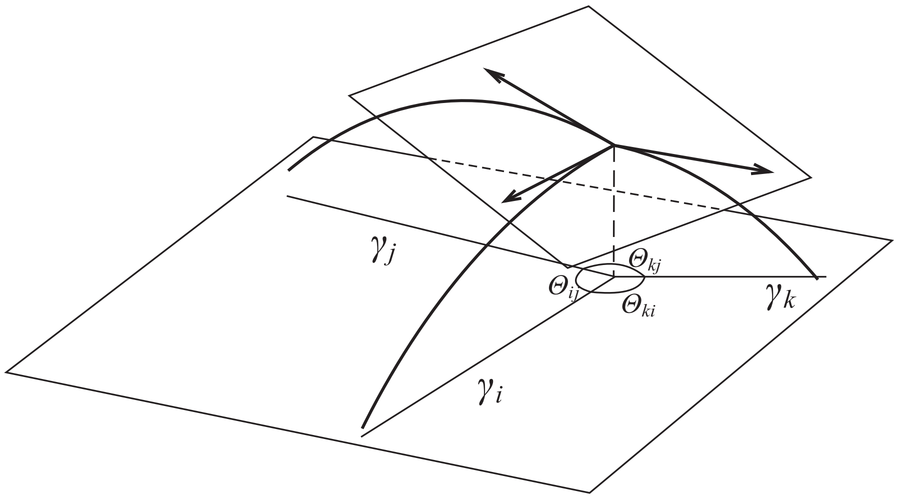
В вершине $a \in J(\Gamma)$ накладываем условия на смещения и изгибающие моменты: перемещения всех соединяемых ребер непрерывны, а изгибающие моменты знакосогласованы[1]:

$$u_i(a) = u_k(a), \quad i, k \in I(a),$$
$$(pu'')_i(a) = \alpha_i(a)(pu'')_k(a),$$
$$\sum_{i \in I(a)} \alpha_i(a) u_i'(a) = 0, \quad \alpha_i(a) > 0,$$
$$\sum_{i \in I(a)} (pu'')_i'(a) = f(a, u_k(a), u_k''(a)), \quad a \in J(\Gamma).$$

Третье условие – геометрическое условие, а последнее – условие динамического равновесия.

[1] B. Dekoninck, S. Nicase, *Control of networks of Euler-Bernoulli beams.* ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations (1999);
D. Mercier, V. Régnier, *Spectrum of a network of Euler-Bernoulli beams.* J. Math. Anal. Appl., (2008).
G. Xu and N. Mastorakis, *Differential equations on metric graph.* Wseas Press, (2010)
K. Ammari, F. Shel, *Stability of a tree-shaped network of strings and beams.* Mathematical Methods in the Applied Sciences, (2018).

Условия жесткого соединения стержней



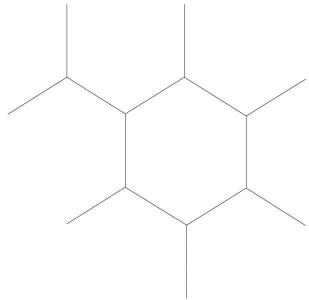
Обозначим через θ_{is}– угол между осевыми линиями i–го и s–го стержней, примыкающих к вершине $a \in J(\Gamma)$. Так как для любого $i \in I(a) \setminus \{j,k\}$ векторы $u_i'(a)$, $u_j'(a)$ и $u_k'(a)$ лежат в одной плоскости, то условие компланарности этих векторов имеет вид

$$\sin\theta_{kj}u_i'(a) + \sin\theta_{ij}u_k'(a) + \sin\theta_{ki}u_j'(a) = 0.$$

Условия жесткого соединения трех стержней

В случае, когда $|I(a)| = 3 \ \ \forall a \in J(\Gamma)$, мы имеем следующий набор из шести условий согласования[2]

$$\begin{cases} u_i(a) = u_j(a) = u_k(a), \\ (pu'')_i(a) = \alpha_i(a)(pu'')_k(a), \qquad (pu'')_j(a) = \alpha_j(a)(pu'')_k(a), \\ \alpha_i(a)u_i'(a) + \alpha_j(a)u_j'(a) + u_k'(a) = 0, \\ (pu'')_i'(a) + (pu'')_j'(a) + (pu'')_k'(a) = f(a, u_k(a), u_k''(a)). \end{cases}$$



[2] M. Ettehad, *On the Spectra of Periodic Elastic Beam Lattices: Single-Layer Graph*, (2022)

Условия для упруго опертого стержня

Если в некоторой точке стержня имеется сосредоточенное влияние (например, упругая опора), то можно считать эту точку внутренней вершиной $a \in J(\Gamma)$, образованной в результате соединения двух ребер γ_i и γ_k. В этом случае $\alpha_i(a) = 1$ и условия трансмиссии принимают вид:

$$\begin{cases} u_i(a) = u_k(a), \\ u_i'(a) + u_k'(a) = 0, \\ (pu'')_i(a) = (pu'')_k(a), \\ (p_i u_i'')'(a) + (p_k u_k'')'(a) = f(a, u_k(a), u_k''(a)). \end{cases}$$

Нелинейная краевая задача с условиями трансмиссии δ-типа

Изучается вопрос о существовании решения нелинейной краевой задачи четвертого порядка

$$(p(x)u'')'' = f(x, u, u''), \quad x \in \Gamma,$$
$$u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0,$$

В каждой вершине узловой $a \in J(\Gamma)$ накладываются условия трансмиссии δ-типа.

Здесь полагаем, что функция $f : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Нелинейная краевая задача

Одними из основных инструментов нелинейного анализа, предназначенных для изучения такого типа задач, являются:

- метод нижних и верхних решений;
- метод монотонных итераций;
- теорема Красносельского о неподвижной точке;
- теорема Лере-Шаудера.

Линейная краевая задача с условиями трансмиссии δ-типа

Рассматривается линейный дифференциальный оператор L_0, порождаемый линейным уравнением

$$(p(x)u'')'' = h(x), \quad x \in E(\Gamma),$$
$$u_i(a) = u_k(a), \qquad (pu'')_i(a) = \alpha_i(a)(pu'')_k(a), \quad i, k \in I(a);$$
$$\sum_{i \in I(a)} \alpha_i(a)u_i'(a) = 0, \quad \sum_{i \in I(a)} (pu'')_i'(a) = h(a), \quad a \in J(\Gamma),$$

с граничными условиями

$$u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Кратко данную линейную задачу можно записать в виде

$$L_0 u = h(x), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{LP}$$

а исходная нелинейная задача тогда запишется в виде

$$L_0 u = f(x, u, u''), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{NP}$$

Положительная обратимость и принцип максимума

Нелинейный интегральный оператор Гаммерштейна

$$\mathcal{G}u(x) = \int\limits_{\Gamma} G(x,s) f(s, u(s), u''(s))\, ds,$$

где $G(x,s)$ – функция Грина линейного оператора L_0.

Тогда нелинейная краевая задача (NP) эквивалентна задаче

$$u = \mathcal{G}u.$$

Положительная обратимость и принцип максимума

Теорема 1 *Для любой функции $h \in C[\Gamma]$ дифференциальный оператор L_0 обратим, а его функция Грина $G(x,s)$ положительна на $\Gamma \times \Gamma$.*

Теорема 2 (принцип максимума) *Всякое нетривиальное решение краевой задачи*

$$L_0 u \geq 0, \qquad u|_{\partial\Gamma} \geq 0, \quad u''|_{\partial\Gamma} \leq 0,$$

положительно на графе Γ.

Существование решения

Определение 1. Функция $\alpha \in C^4[\Gamma]$ называется *нижним решением* задачи (NP), если

$$L_0\alpha \leq f(x, \alpha, \alpha''), \quad x \in \Gamma, \qquad \alpha|_{\partial\Gamma} \leq 0, \quad \alpha''|_{\partial\Gamma} \geq 0.$$

Определение 2. Функция $\beta \in C^4[\Gamma]$ называется *верхним решением* задачи (NP), если

$$L_0\beta \geq f(x, \beta, \beta''), \quad x \in \Gamma, \qquad \beta|_{\partial\Gamma} \geq 0, \quad \beta''|_{\partial\Gamma} \leq 0.$$

Существование решения

Теорема 3 [3] *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *существуют α и β, верхнее и нижнее решения, задачи (NP), удовлетворяющие условиям*

$$\alpha(x) \leq \beta(x), \text{ для всех } x \in \Gamma;$$
$$\beta''(x) \leq \alpha''(x) \text{ для всех } x \in E(\Gamma);$$

(ii) *f удовлетворяет условиям*

$$f(x,s,v) - f(x,t,v) \leq 0 \text{ для } \alpha(x) \leq s \leq t \leq \beta(x),\ v \in \mathbb{R},\ x \in \Gamma,$$
$$f(x,u,s) - f(x,u,t) \geq 0 \text{ для } \beta''(x) \leq s \leq t \leq \alpha''(x),\ u \in \mathbb{R},\ x \in \Gamma.$$

Тогда существуют две монотонные последовательности $\{\alpha_{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\beta_{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$, неубывающая и невозрастающая соответственно с $\alpha_{[0]} = \alpha$ и $\beta_{[0]} = \beta$, которые сходятся равномерно к экстремальным решениям задачи (NP) из порядкового отрезка $[\alpha, \beta]$.

---

[3] Кулаев Р.Ч., Уртаева А.А. *О существовании решения нелинейной краевой задачи четвертого порядка на графе.* Дифференц. уравнения. (2023)

Существование решения в случае $f(x,u,u'') = f(x,u)$

Рассматривается однородное линейное дифференциальное уравнение

$$L_r u(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

порождаемое соотношениями

$$(p(x)u'')'' + r(x)u = 0, \quad x \in E(\Gamma),$$
$$u_i(a) = u_k(a), \qquad (pu'')_i(a) = \alpha_i(a)(pu'')_k(a), \quad i,k \in I(a);$$
$$\sum_{i\in I(a)} \alpha_i(a)u_i'(a) = 0, \quad \sum_{i\in I(a)} (pu'')_i'(a) + r(x)u = 0, \quad a \in J(\Gamma).$$

Для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ введём в рассмотрение краевую задачу

$$L_r u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma\setminus a} = 0, \quad u'(a) = 1. \qquad (\mathrm{LP_a})$$

Свойства линейного оператора L_r

Лемма 1 *Если* $r(x) \geq 0$ *на* Γ, *то для любой вершины* $a \in \partial\Gamma$ *краевая задача* $(\mathrm{LP_a})$ *имеет единственное решение* $v_a(x)$.

Определение 3. Оператор L_r назовём *квазинеосциллирующим* на графе Γ, если для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ соответствующее решение $v_a(x)$ положительно на Γ и найдется вершина $a_0 \in \partial\Gamma$ такая, что решение $v_{a_0}(x)$ имеет тройной нуль на $\partial\Gamma$.

Теорема 4 *Существует число* $R > 0$ *такое, что при* $r(x) \equiv R$ *на* Γ *оператор* L_R *квазинеосциллирующий на* Γ.

Теорема 5 *Пусть* λ_0 *– ведущее собственное значение оператора* L_0. *Оператор* L_r *краевой задачи*

$$L_r u(x) = 0, \qquad u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0,$$

положительно обратим тогда и только тогда, когда $-\lambda_0 < r(x) \leq R$ *на* Γ.

Существование решения в случае $f(x,u,u'') = f(x,u)$

Рассматривается краевая задача

$$(p(x)u'')'' = f(x,u), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0. \qquad (\mathrm{NP}_1)$$

Теорема 6 (ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ) *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *существуют* α *и* β, *верхнее и нижнее решения, задачи* (NP_1), *удовлетворяющие условию*

$$\alpha(x) \le \beta(x) \text{ для всех } x \in \Gamma;$$

(ii) f *– непрерывна и существует функция* $0 \le r(x) \le R$, $x \in \Gamma$, *такая, что при* $\alpha(x) \le u \le \beta(x)$, $x \in \Gamma$, *выполняется неравенство*

$$f(x,\alpha(x)) + r(x)\alpha(x) \le f(x,u) + r(x)u \le f(x,\beta(x)) + r(x)\beta.$$

Тогда существует решение задачи (NP_1) *из порядкового отрезка* $[\alpha,\beta]$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!